第七讲 丘奇-图灵论题（二）

罗　欢

Email：hluo@fzu.edu.cn

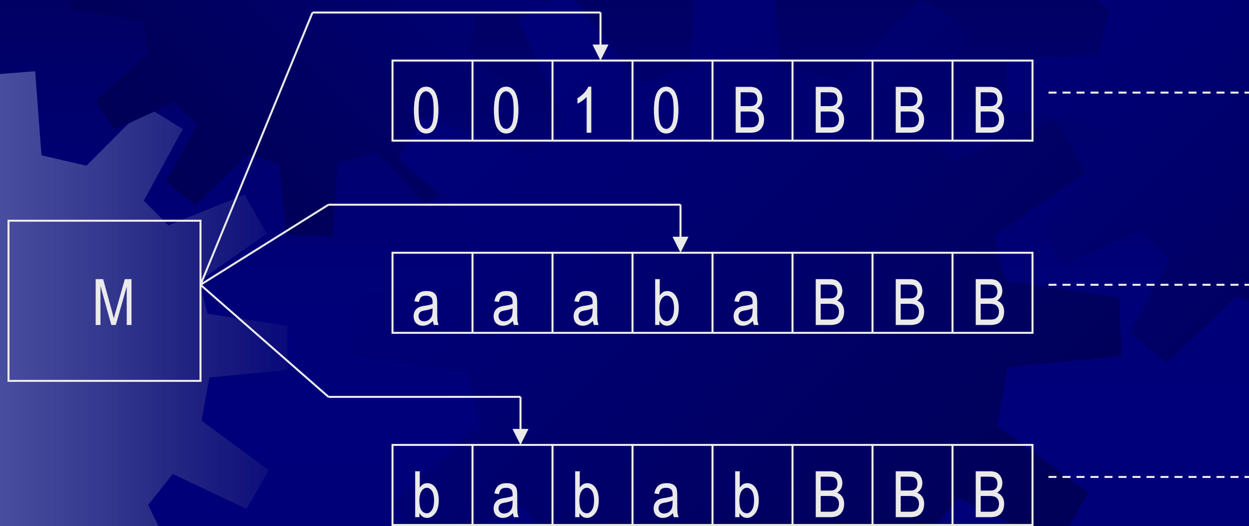
图灵机的各种等价变形

图灵机的等价变形

- 双向无穷带
- 多维带
- 多带
- 多头
- 非确定型
- ……
- TM概念有很强的稳健性

多带图灵机

多带图灵机



- 多带图灵机的转移函数:

  $$\delta: Q\times\Gamma^k\rightarrow Q\times\Gamma^k\times\{L,R\}^k$$

  $$\delta(q_i,a_1,\ldots,a_k) = (q_j,b_1,\ldots,b_k,L,R,\ldots,L)$$

定理4.8

- **定理4.8: 每个多带TM都有等价单带TM.**
- **分析:**
  - “分段”：每段模拟一条带

#	0	1	0	1	0	#	a	a	a	#	b	a	#	B

定理4.8证明

- 证明: 设计单带TM S来模拟多带TM M.

S="对于输入$w=w_1\ldots w_n$:

1) S在自己带上放上 $\#w_1w_2\ldots w_n\#B\#B\#\ldots\#$.

2) 为了模拟一步移动,

S从标记左端点的第一个#开始扫描,

直到标记右端点的第k+1个#.

确定虚拟读写头下的符号.

然后S进行第二次扫描,

根据M的转移函数来更新带子.

3) 任何时候,只要S将某个虚拟读写头向右移动到某个#上, S就在这个位置写下空白符,并把这个位置以右的所有内容向右平移一格.

然后继续模拟." (…正确性证明…) #

推论4.9

- **推论4.9**: 图灵可识别当且仅当
  可用多带图灵机识别

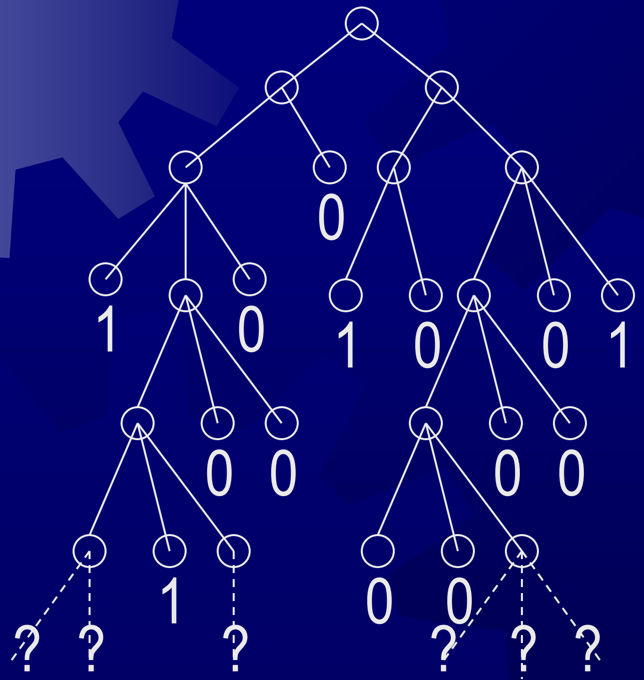
非确定型图灵机

非确定型图灵机

- **非确定型图灵机(NTM):**

  δ: Q×Γ→**P**(Q×Γ×{L,R,**S**})

- **计算树:** 非确定性分支



定理4.10

- 定理4.10: 每个NTM都有
  等价DTM.
- 分析: DTM “遍历”
  NTM计算树
  - 先深 ×
  - 先宽 √

定理4.10证明图示

- 证明: 用DTM D来模拟NTM N.

定理4.10证明

证明: 用DTM D来模拟NTM N.

D = "对输入w:

1) 开始时,第一个带包含w,
   其余两个带为空.
2) 把第一个带复制到第二个带上.
3) 在第二个带上模拟N在输入w上的某个
   非确定性计算分支.
   这个分支由第三个带指定.
   若遇到接受格局,则接受.
   否则进入第四步.
4) 在第三个带上,用字典序下的下一个串
   来替代原用的串. 转到第二步. "

推论4.11-12

- 推论4.11: 图灵可识别当且仅当
  可用非确定型图灵机识别
- 推论4.12:图灵可判定当且仅当
  可用非确定型图灵机判定

枚举器与识别器

枚举器

- 计算装置的工作方式:
  - 识别器: 输入x, 输出 0/1/?
  - 判定器: 输入x, 输出 0/1
  - 转换器: 输入x, 输出y
  - 产生器: 输入0^n, 输出x_n
  - 枚举器: 输入ε, 输出$x_1,x_2,x_3,\ldots$
    - 无遗漏, 无多余(可重复), 无顺序

定理4.13

- **定理4.13:** 图灵可识别等价于可枚举.
- 分析:

可识别⇒可枚举：枚举Σ*, 逐个识别

楔形过程: 对$s_1,s_2,\ldots,s_k$运行k步.

可识别⇐可枚举：枚举, 等待x出现

定理4.13证明

证明: (⇐)

设枚举器E枚举语言A,

则设计TM M识别A.

M="对输入w:

1) 运行E, 每当E输出一个串时,

将这个串与w进行比较.

2) 若w曾在E的输出中出现过,

则接受."

定理4.13证明

证明: (⇒).

设TM M识别语言A,

则设计枚举器E枚举A.

设$\Sigma^*=\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$.

E="忽略输入.

1) 对i=1,2,3,…重复下列步骤.

2) 对$s_1,s_2,s_3,\ldots, s_i$中每一个,

让M以其作为输入运行i步.

3) 如果有计算接受,

则打印相应的s_j."

计算模型的等价性

- 计算模型
  - 图灵机(及其变种)
  - λ-演算
  - 0型文法
  - ……
- 这些模型彼此等价
  - 可以互相模拟
- 你的经验
  - C与JAVA等价

算法的定义

算法(Algorithm)

- 9世纪数学家al-Khowarizmi
  - “from the town of Kowarzimi”
    - 该地现在是 Khiva, Uzbekistan
  - 他的著作《复原和化简的规则》
    Kitab al-jabr w’al muquabala
    - Algebra一词也源自此书
- 18世纪出现Algorithm一词
  - 原意阿拉伯数字十进制算术
    Algorism

希尔伯特第十问题

- 1900年, 希尔伯特23个问题
- 希尔伯特第10问题:

  有没有求多项式**整数根**的**算法**?

  "通过**有限**多次**运算**就可以决定的过程"

- $6X^3YZ^2+3XY^2-X^3-10=0$
- $X^2+Y^2=Z^2$ (勾股定理)
- $X^n+Y^n=Z^n$ $(n>2)$ (费马定理)

哥德尔,图灵,……

- Godel不完备性定理:
  任何形式系统要么是不完备的,
  要么是不相容的
  - “这句话没有证明”
- Church, Kleen: 递归论
- Turing: 图灵机
  - 通用机存在
  - 停机问题不可解(下一章)
- Davis, Putnam, Robinson,
  Matijasevic: 第10问题否定回答

丘奇-图灵论题

- 算法 ≅ 处处停机图灵机

  = λ-演算 = 0型文法

  = ……

- 算法是直觉概念
- 图灵机,λ-演算,0型文法,……

  是数学概念
- = 是可以严格证明的定理
- ≅ 可以作为定义, 不能证明

算法的定义

- 丘奇-图灵论题 (Church-Turing Thesis)

算法的直觉概念 = 图灵机算法

图灵机算法的描述

图灵机算法的描述方式

- 形式描述
  - 七元组
- 实现描述
  - 用日常语言描述图灵机的运行(如何存放数据,如何移动读写头)
  - 不给出状态和转移函数的细节
- 高层描述
  - 用日常语言描述算法
  - 不考虑对读写头和带的管理

描述图灵机输入的记号

- 图灵机的输入总是串
  - 其他输入对象必须表示成串
    - 多项式,图,文法,自动机,…,
      及其任意组合
- 对象O的编码是 <O>
  - 多对象$O_1,O_2,\ldots,O_k$的编码是
    $\langle O_1,O_2,\ldots,O_k \rangle$
  - 可用多种合理方式来编码
  - 图灵机总能把一种编码翻译成另外一种编码

编码的细节

- 字符串$x=010, y=11$, $\langle x,y\rangle=?$
  - $\langle x,y\rangle_1=001100101111$
    - $|\langle x,y\rangle_1|=2|x|+2|y|+2$
  - $\langle x,y\rangle_2=11111001011$
    - $|\langle x,y\rangle_2|=|x|+|y|+2\log|x|+2$
- 边界自明, 自限界
  - $\langle x\rangle=111110010$, $\langle y\rangle=11001011$
    - $|\langle x\rangle|=|x|+2\log|x|+2$
  - $\langle x,y\rangle_3=\langle x\rangle\langle y\rangle=11111001011001011$
    - $|\langle x,y\rangle_3|=|x|+|y|+2\log|x|+2\log|y|+4$

描述图灵机算法的格式

- 带引号的锯齿状日常语言文字段
  - 将算法分成步骤, 每个步骤可能包括图灵机计算的许多步
  - 用更深的缩进来表示算法的分块结构
  - 第一行描述机器的输入
  - 如果输入是对象的编码<A>, 就隐含着如下含义: 图灵机首先检查输入是否是所要对象的编码, 如果不是就拒绝

例4.14 A={<G>|G是连通无向图}

分析: 洪水算法 (标记算法)

高层描述:

M=“ 输入是图G的编码<G>:

1) 选择G的第一个顶点, 并做上标记.
2) 重复下列步骤,
   直到没有新顶点可做标记.
3) 对于G的每个顶点,
   如果它是带标记顶点的邻点,
   则给它做上标记.
4) 扫描G的所有顶点,
   确定是否都已做上标记,
   如果是就接受,否则拒绝. ”

例4.14实现描述的细节

图G的编码

<G>=(1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))

检查输入合法性

顶点序列不含重复元素

边序列中的顶点应该在顶点序列中

算法步骤

1) 在最左端数字上加个点

2,3) 在一个未加点的顶点n_1下画线,

在一个已加点的顶点n_2下画线,

扫描边序列寻找(n_1,n_2),

重新设置下画线

4) 扫描顶点序列,检查是否都已加点

作业

- 3.3 3.6 3.7 3.8